Calcul de la fonction de Mertens

Vie Paul & Servigne Joseph

4 octobre 2024

Introduction

La fonction de Mertens est une fonction arithmétique définie par la somme des fonctions de Möbius, notée M :

$$M(n) = \sum_{k=1}^{n} \mu(k) \tag{1}$$

où μ est la fonction de Möbius, définie par :

$$\mu(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k \text{ a un facteur carré} \\ (-1)^r & \text{si } k \text{ est produit de } r \text{ nombres premiers distincts} \end{cases} \tag{2}$$

Objectif

L'objectif de ce projet est de calculer la fonction de Mertens pour de grands entiers n.

- Elle est liée à la fonction ζ de Riemann.
- La conjecture de Riemann stipule que les zéros non triviaux de la fonction ζ ont une partie réelle égale à $\frac{1}{2}$.
- La conjecture de Mertens stipule que $|M(x)| \leq \sqrt{x}$ pour tout réel x, mais a été réfutée en 1985 par Odlyzko et te Riele.
- Si $M(n) = O(n^{\frac{1}{2}+\epsilon})$ pour tout $\epsilon > 0$, cela implique que la conjecture de Riemann est vraie.

Formule d'inversion de Möbius

Soit f et g deux fonctions arithmétiques. Si pour tout entier n on a

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \tag{3}$$

alors pour tout entier n on a

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right) \tag{4}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}\sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right) &= \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{l|\frac{n}{d}} f(l) = \sum_{l|n} f(l) \sum_{\substack{d|n \\ l|\frac{n}{d}}} \mu(d) \\ &= \sum_{l|n} f(l) \sum_{d|\frac{n}{l}} \mu(d) = \sum_{l|n} f(l) \sum_{m|\frac{n}{l}} \mu(m) = f(n)\end{aligned}$$

Théorème sur la fonction de Mertens

Pour tout réel u et x tels que $1 \leq u \leq x$, on a l'égalité suivante :

$$M(x) = M(u) - \sum_{m \leq u} \mu(m) \sum_{\frac{u}{m} < n \leq \frac{x}{m}} M\left(\frac{x}{mn}\right). \tag{5}$$

- Preuve basée sur la formule d'inversion de Möbius.
- La somme interne se réécrit comme une double somme sur les diviseurs.
- Simplification via la somme des valeurs de μ sur les diviseurs.

Méthode de calcul

- Réduction des termes dans la formule de départ.
- Utilisation de la fonction arithmétique $\alpha(n) = \lfloor \frac{y}{n} \rfloor$.
- Lemme clé : $\alpha(n)$ prend au plus $2\lfloor \sqrt{y} \rfloor + 1$ valeurs.

$$\sum_{m=1}^{u} \left(\lfloor \frac{x}{m} \rfloor - \lfloor \frac{u}{m} \rfloor\right) \geq \lfloor x \rfloor - \lfloor u \rfloor = x + O(u)$$

Réduction du nombre de termes

- Réécriture de la formule en utilisant le Lemme précédent.
- Nouvelle décomposition :

$$M(x) = M(u) - S_1(x,u) - S_2(x,u) \tag{6}$$

$$S_1(x,u) = \sum_{m \le u} \mu(m) \sum_{\frac{u}{m} < n \le \sqrt{\frac{x}{m}}} M(\frac{x}{mn})$$

$$S_2(x,u) = \sum_{k \le \sqrt{x}} M(k) \sum_{m \le \min(u, \frac{x}{k^2})} \mu(m) l(\frac{x}{m}, k)$$

où $l(y,k) = \#\{n : \sqrt{y} < n \le y, \lfloor \frac{y}{n} \rfloor = k\}$

Réduction du nombre de termes

Le nombre de termes de $S_1(x,u)$ et $S_2(x,u)$ est $O(\sqrt{xu})$

- Preuve par l'étude de la série $U_n = \sum_{m \le n} \frac{1}{\sqrt{m}}$.
- Réduction efficace du nombre de termes à évaluer.

$$B_1(x,u) = \sum_{m \le u} \sum_{\frac{u}{m} < n \le \sqrt{\frac{x}{m}}} 1 = \sum_{m \le u} \left(\lfloor \sqrt{\frac{x}{m}} \rfloor - \lfloor \frac{u}{m} \rfloor \right) < \sqrt{x} \sum_{m \le u} \frac{1}{\sqrt{m}} \tag{7}$$

Calcul de $\mu(n)$ avec le Crible d'Ératosthène

- Algorithme pour tabuler les valeurs de $\mu(n)$:

```
Data: 2 Entiers : b > a > 0
Result: une table t(n) des valeurs de μ(n) pour a ≤ n < b
forall i ∈ [a ; b[ do
    t(i) ← 1
end
forall p premier t.q p ∈ [2 ; √b] do
    forall m multiple de p^2 t.q m ∈ [a ; b[ do
        t(m) ← 0
    end
    forall m multiple de p t.q m ∈ [a ; b[ do
        t(m) ← t(m) · −p
    end
end
forall n ∈ [a ; b[ do
    if t(n) ≠ 0 then
        if |t(n)| < n then
            t(n) ← t(n) · −1
        end
        if t(n) > 0 then
            t(n) ← 1
        end
        if t(n) < 0 then
            t(n) ← −1
        end
    end
end
```

Complexité des Calculs

- Complexité du calcul de $I(y,k)$: $O(1)$
- Complexité du Crible d'Ératosthène : $O(x\ln(\ln(x)))$
- Complexité de l'algorithme pour calculer $\mu(n)$:

$$O((b-a)\ln(\ln(b))+\frac{\sqrt{b}}{\ln(b)}) \tag{8}$$

Calcul de la Fonction de Mertens

- Introduction de la tabulation de $M(n)$ pour des blocs de taille L.
- Complexité de la tabulation : $O(L\ln(\ln(a_{k+1})) + \frac{\sqrt{a_{k+1}}}{\ln(a_{k+1})})$.

Démonstration.

- Tabuler μ de a_k à a_{k+1}.
- $M(a_k + l) = \mu(a_k + l) + M(a_k + l - 1)$ pour $0 \leq l < a_{k+1} - a_k$.

$\square$

Minimisation de la Complexité

Lemma

La complexité de $M(n)$ est $O(\sqrt{xu} + \frac{x}{u}\ln(\ln(\frac{x}{u})))$.

Démonstration.

- $O(\frac{x}{u}\ln(\ln(\frac{x}{u})))$: Complexité de la tabulation de μ et des nombres premiers jusqu'à $\frac{x}{u}$.
- Tabulation par blocs de taille L n'affecte pas la complexité de $S_1(x,u)$ et $S_2(x,u)$.

$\square$

Nombre de termes de $S_1(x, u)$

- Calcul de $S_1(x, u)$:

$$S_1(x,u) = \sum_{m \leq u} \mu(m) \sum_{\frac{u}{m} < n \leq \sqrt{\frac{x}{m}}} M\left(\frac{x}{mn}\right)$$

Le nombre de termes de S_1 calculé par des blocs de taille L est :

$$\sum_{m \leq u} \sum_{k \leq \frac{x}{uL}} \left(\min\left(\left\lfloor \frac{x}{ma_k} \right\rfloor, \left\lfloor \sqrt{\frac{x}{m}} \right\rfloor \right) - \max\left(\left\lfloor \frac{x}{ma_{k+1}} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{u}{m} \right\rfloor \right) \right)$$

Démonstration.
Voir démonstration détaillée dans le document. □

Complexité de $S_1(x, u)$

$$\sum_{m \le u} \sum_{k \le \frac{x}{uL}} \left(\min\left(\left\lfloor \frac{x}{m a_k} \right\rfloor, \left\lfloor \sqrt{\frac{x}{m}} \right\rfloor \right) - \max\left(\left\lfloor \frac{x}{m a_{k+1}} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{u}{m} \right\rfloor \right) \right)$$

- Subdivision de $\left[\frac{u}{m}, \sqrt{\frac{x}{m}}\right]$.
- $\sum_{k \le \frac{x}{uL}} (\ldots) \le \sqrt{\frac{x}{m}}$.
- Complexité en temps de $S_1(x, u)$: $O(\sqrt{xu})$.

Complexité de $S_2(x, u)$

$$S_2(x,u) = \sum_{k \le \sqrt{x}} M(k) \sum_{m \le \min(u, \frac{x}{k^2})} \mu(m) I\left(\frac{x}{m}, k\right)$$

- $\mu(m)$, $M(k)$, $I\left(\frac{x}{m}, k\right)$ obtenus en $O(1)$.
- Complexité en temps de $S_2(x, u)$:

$$\sum_{m \le u} \sum_{k \le \sqrt{\frac{x}{m}}} 1 = \sum_{m \le u} \sqrt{\frac{x}{m}}$$

- Complexité : $O(\sqrt{xu})$.

Optimisation de u

- Posons $u = x^{1/3}\ln(\ln(x))^{2/3}$.
- La complexité devient :

$$\begin{aligned}\sqrt{xu} + \frac{x}{u}\ln(\ln(\frac{x}{u})) &= x^{2/3}\ln(\ln(x))^{1/3} + \frac{x^{2/3}}{\ln(\ln(x))^{2/3}}\ln(\ln(\frac{x}{u}))\\ &= O(x^{2/3}\ln(\ln(x))^{1/3}).\end{aligned}$$

Calcul de la Partie Entière de la Racine n-ième

- Problème : Calculer $\lfloor \sqrt[n]{a} \rfloor$ pour un entier $a \geq 1$.
- Méthode basée sur l'algorithme de Newton et généralisée à partir de $\lfloor \sqrt{a} \rfloor$.

Data: un entier positif a
Result: le nombre m t.q. $m^n \leq a < (m+1)^n$
$x \leftarrow a$
$y \leftarrow \lfloor \frac{(n-1)x + \frac{a}{x^{n-1}}}{n} \rfloor$
while $y < x$ **do**
  $x \leftarrow y$
  $y \leftarrow \lfloor \frac{(n-1)x + \frac{a}{x^{n-1}}}{n} \rfloor$
end
return x

Algorithm 1: Calcul de $\lfloor \sqrt[n]{a} \rfloor$

Preuve de la Validité de l'Algorithme

- Basée sur la méthode de Newton pour résoudre $x^n - a = 0$.
- Utilisation de l'inégalité arithmético-géométrique.

$$\frac{(n-1)x + \frac{a}{x^{n-1}}}{n} \geq \sqrt[n]{a}$$

$$x_{k+1} = \lfloor \frac{(n-1)x_k + \frac{a}{x_k^{n-1}}}{n} \rfloor$$

$$x_{k+1} \geq \lfloor \sqrt[n]{a} \rfloor$$

- Algorithme termine si $x_k \leq \lfloor \sqrt[n]{a} \rfloor$.
- Garantit $x_k = \lfloor \sqrt[n]{a} \rfloor$ à la fin de l'algorithme.

Choix du Facteur L

- L doit être suffisamment grand pour limiter les appels à la tabulation de μ.
- Définition : $L \geq u$ pour une complexité en espace $O(L)$.
- Utilisation de $L = 256u$ pour $n = 10^{17}$ nécessitant environ 2 Go de RAM.

Implémentation en C

- Implémentation en langage C pour la performance.
- Objectif : éviter les erreurs d'arrondi et comprendre toutes les fonctions du programme.
- Code disponible sur :

  `https://moule.informatique.univ-paris-diderot.fr/-/snippets/6/raw/main/mertens_compute.c`

Tableau des Valeurs de $M(n)$

n	$M(n)$	Cpu time (ms)	Real time (s)
10^{16}	-3195437	5132270	5137
2×10^{16}	-7192737	8245970	8253
3×10^{16}	-1493402	10810250	10819
4×10^{16}	18329011	13057600	13068
5×10^{16}	15092343	15077940	15091
6×10^{16}	-15262206	17073420	17087
7×10^{16}	45264522	18851100	18866
8×10^{16}	-43148849	20596880	20613
9×10^{16}	-27907378	22541820	22560
10^{17}	-21830254	24166000	24185

- Résultats vérifiés avec la littérature.