Calcul de la fonction de Mertens

Vie Paul & Servigne Joseph

October 4, 2024

1 Introduction

La fonction de Mertens est une fonction arithmétique (définie par la somme des fonctions de Möbius) notée M et est définie par la formule suivante :

$$M(n) = \sum_{k=1}^{n} \mu(k). \tag{1}$$

où μ est la fonction de Möbius, définie par :

$$\mu(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k \text{ a un facteur carré} \\ (-1)^r & \text{si } k \text{ est produit de } r \text{ nombres premiers distincts} \end{cases} \tag{2}$$

2 Objectif

L'objectif de ce projet est de calculer la fonction de Mertens pour de grands entiers n. L'intérêt de calculer cette fonction est qu'elle est liée à la fonction ζ de Riemann. En effet, la conjecture de Riemann stipule que les zéros non triviaux de la fonction ζ de Riemann ont une partie réelle égale à $\frac{1}{2}$, et cette conjecture est étroitement liée à la conjecture de Mertens, qui quant à elle, stipule que pour tout réel x, $|M(x)| \leq \sqrt{x}$. Car même si cette dernière a été réfutée par Odlyzko et te Riele en 1985, il reste un lien entre la fonction de Mertens et la conjecture de Riemann. En effet, si $\forall \epsilon > 0$ on a que $M(n) = O(n^{\frac{1}{2}+\epsilon})$ alors cela implique que la conjecture de Riemann est vraie.

3 Identité Combinatoire

Lemme 1 (Multiplicativité de la fonction de Möbius)**.** *La fonction de Möbius est multiplicative, c'est-à-dire que pour tous entiers a et b premiers entre eux, on a :*

$$\mu(ab) = \mu(a)\mu(b). \tag{3}$$

Preuve. Soit a et b deux entiers strictement positifs premiers entre eux.

- Si a ou b ont un facteur carré, alors ab a un facteur carré, donc $\mu(ab) = 0 = \mu(a)\mu(b)$.
- Si a et b n'ont pas de facteur carré, alors $\mu(a) = (-1)^r$ et $\mu(b) = (-1)^s$ pour des entiers r et s. On a alors que ab est produit de $r + s$ nombres premiers distincts, donc $\mu(ab) = (-1)^{r+s} = (-1)^r(-1)^s = \mu(a)\mu(b)$.

□

Lemme 2 (Propriété de la fonction de Möbius)**.**

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & si\ n = 1 \\ 0 & si\ n > 1 \end{cases} \tag{4}$$

Preuve.
- Si $n = 1$, alors $\mu(1) = 1$.
- Si $n > 1$, on note $p_1, p_2, \ldots, p_k$ les facteurs premiers distincts de n.
  Et $a_1, a_2, \ldots, a_k$ les exposants de ces facteurs premiers dans la décomposition en facteurs premiers de n, tel que $\forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $a_i = v_{p_i}(n)$ la valuation p_i-adique de n.
  On a ainsi que $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$. Si $\exists i \in \{1, 2, \ldots, k\}, a_i > 1$, alors par définition $\mu(p_i^{a_i}) = 0$.
  De plus :

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) = \mu(1) + \sum_{i=1}^{k} \mu(p_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq k} \mu(p_i p_j) \\ + \ldots + \mu(p_1 p_2 \ldots p_k) \\ = 1 - k + \binom{k}{2} - \binom{k}{3} + \ldots + (-1)^k. \end{aligned}$$

  On reconnaît alors la formule du binôme de Newton, qui donne

$$\sum_{d|n} \mu(d) = (1 - 1)^k = 0.$$

□

Théorème 1 (Formule d'inversion de Möbius)**.** *Soit f et g deux fonctions arithmétiques. Si pour tout entier n on a que*

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d). \tag{5}$$

alors pour tout entier n on a que

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g(\frac{n}{d}). \tag{6}$$

Preuve.

$$\sum_{d|n} \mu(d) g(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{l|\frac{n}{d}} f(l) = \sum_{l|n} f(l) \sum_{\substack{d|n \\ l|\frac{n}{d}}} \mu(d)$$

$$= \sum_{l|n} f(l) \sum_{d|\frac{n}{l}} \mu(d) = \sum_{l|n} f(l) \sum_{m|\frac{n}{l}} \mu(m) = f(n).$$

□

Lemme 3. *On a l'égalité suivante :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 1, \sum_{n \leq x} M(\frac{x}{n}) = 1. \tag{7}$$

Preuve. On a par définition de la fonction de Mertens :

$$\sum_{n \leq x} M(\frac{x}{n}) = \sum_{n \leq x} \sum_{d \leq \frac{x}{n}} \mu(d) = \sum_{l \leq x} \sum_{n \leq x} \sum_{\substack{d \leq \frac{x}{n} \\ d \cdot n = l}} \mu(d) = \sum_{l \leq x} \sum_{d|l} \mu(d) \sum_{\substack{n \leq \frac{x}{d} \\ n = \frac{l}{d}}} 1$$

$$= \sum_{l \leq x} \sum_{d|l} \mu(d) = 1 \text{ d'après le Lemme 2.}$$

□

Théorème 2. *Pour tout réel u et x tels que, $1 \leq u \leq x$, on a l'égalité suivante :*

$$M(x) = M(u) - \sum_{m \leq u} \mu(m) \sum_{\frac{u}{m} < n \leq \frac{x}{m}} M(\frac{x}{mn}). \tag{8}$$

Preuve. Par le Lemme 3, en remplacant x par $\frac{x}{m}$, vérifiant $\frac{x}{m} \geq \frac{x}{u} \geq 1$, on a:

$$\sum_{m \leq u} \mu(m) \sum_{n \leq \frac{x}{m}} M(\frac{x}{mn}) = \sum_{m \leq u} \mu(m) = M(u).$$

En utilisant la formule d'inversion de Möbius sur M, ainsi que la même idée de la preuve du Lemme 3 on obtient que:

$$\sum_{m \leq u} \mu(m) \sum_{n \leq \frac{u}{m}} M(\frac{x}{mn}) = \sum_{\substack{n \leq \frac{u}{m} \\ mn = l}} M(\frac{x}{mn})$$

$$= \sum_{l \leq u} \sum_{m|l} \mu(m) \sum_{\substack{n \leq \frac{u}{m} \\ mn = l}} M(\frac{x}{l})$$

$$= \sum_{l \leq u} M(\frac{x}{l}) \sum_{m|l} \mu(m) \sum_{\substack{n \leq \frac{u}{m} \\ mn = l}} 1$$

$$= \sum_{l \leq u} M(\frac{x}{l}) \sum_{m|l} \mu(m) = M(\frac{x}{1}) = M(x).$$

Ainsi :

$$\sum_{m\leq u}\mu(m)\sum_{\frac{u}{m}<n\leq\frac{x}{m}}M(\frac{x}{mn})=M(x)-M(u).$$

□

4 Méthode de calcul

4.1 Réduction des termes

Dans la formule (8) , on a plus de $x+O(u)$ termes. (sans prendre en compte la partie entière) Puisque

$$\sum_{m=1}^{u}(\lfloor\frac{x}{m}\rfloor-\lfloor\frac{u}{m}\rfloor)\geq\lfloor x\rfloor-\lfloor u\rfloor=x+O(u).$$

Nous allons alors réduire ce nombre de termes. On introduit tout d'abord le Lemme suivant utilisé plus loin dans ce rapport.

Lemme 4. *Pour tout réel y strictement positif, la fonction arithmétique* $\alpha(n)=\lfloor\frac{y}{n}\rfloor$ *prend au plus* $2\lfloor\sqrt{y}\rfloor+1$ *valeurs.*

Preuve. Notons :

$$A_1=\{\alpha(n)|1\leq n\leq\lfloor\sqrt{y}\rfloor\}\text{ et }A_2=\{\alpha(n)|\lfloor\sqrt{y}\rfloor<n\}.$$

Alors

$$\#A_1\leq\lfloor\sqrt{y}\rfloor\ \text{ et }\#A_2=\#\{0,1,\ldots,\lfloor\sqrt{y}\rfloor\}\leq\lfloor\sqrt{y}\rfloor\ +1.$$

Et donc

$$\#Im(\alpha)=\#A_1\cup A_2\leq2\lfloor\sqrt{y}\rfloor\ +1.$$

□

Ainsi en utilisant le fait que la fonction de Mertens est définie sur les entiers et que donc $M(x)=M(\lfloor x\rfloor)$, on obtient :

Lemme 5. *Réécriture de la formule* (8) *en suivant l'idée du lemme 4*

$$M(x)=M(u)-S_1(x,u)-S_2(x,u).\tag{9}$$

Avec

$$S_1(x,u)=\sum_{m\leq u}\mu(m)\sum_{\frac{u}{m}<n\leq\sqrt{\frac{x}{m}}}M(\frac{x}{mn}).$$

$$S_2(x,u)=\sum_{k\leq\sqrt{x}}M(k)\sum_{m\leq min(u,\frac{x}{k^2})}\mu(m)l(\frac{x}{m},k).$$

où $l(y,k)=\#\{n:\sqrt{y}<n\leq y,\lfloor\frac{y}{n}\rfloor=k\}$ (7)

Preuve. Par la formule (8), on a

$$\begin{aligned}
M(x) &= M(u) - \sum_{m\leq u}\mu(m)\sum_{\frac{u}{m}<n\leq\frac{x}{m}} M(\frac{x}{mn}) \\
&= M(u) - \sum_{m\leq u}\mu(m)\sum_{\frac{u}{m}<n\leq\sqrt{\frac{x}{m}}} M(\frac{x}{mn}) - \sum_{m\leq u}\mu(m)\sum_{\sqrt{\frac{x}{m}}<n\leq\frac{x}{m}} M(\frac{x}{mn}) \\
&= M(u) - S_1(x,u) - \sum_{m\leq u}\mu(m)\sum_{\sqrt{\frac{x}{m}}<n\leq\frac{x}{m}} M(\frac{x}{mn}).
\end{aligned}$$

Passons maintenant a la preuve de $S_2(x,u) = \sum_{m\leq u}\mu(m)\sum_{\sqrt{\frac{x}{m}}<n\leq\frac{x}{m}} M(\frac{x}{mn})$.

$$\begin{aligned}
S_2(x,u) &= \sum_{k\leq\sqrt{x}} M(k)\sum_{m\leq min(u,\frac{x}{k^2})}\mu(m)l(\frac{x}{m},k) \\
&= \sum_{k\leq\sqrt{x}} M(k)\sum_{\substack{m\,\leq\,u\\ k\,\leq\,\sqrt{\frac{x}{m}}}}\mu(m)l(\frac{x}{m},k) \\
&= \sum_{k\leq\sqrt{x}}\sum_{\substack{m\,\leq\,u\\ k\,\leq\,\sqrt{\frac{x}{m}}}} M(k)\mu(m)l(\frac{x}{m},k) \\
&= \sum_{m\leq u}\sum_{k\leq\sqrt{\frac{x}{m}}} M(k)\mu(m)l(\frac{x}{m},k) \\
&= \sum_{m\leq u}\mu(m)\sum_{k\leq\sqrt{\frac{x}{m}}} M(k)l(\frac{x}{m},k) \\
&= \sum_{m\leq u}\mu(m)\sum_{\sqrt{\frac{x}{m}}<n\leq\frac{x}{m}} M(\frac{x}{mn}).
\end{aligned}$$

□

5 Algorithmes

5.1 Tables

On s'intéresse dans cette section au calcul d'une table de μ.
Néanmoins on précise que ce dernier utilise le crible d'Eratosthène. Nous verrons dans la sous section suivante (*cf 5.2 Complexité*), les complexités de ces derniers.
L'algorithme est le suivant:

```
Data: 2 Entiers : b > a > 0
Result: une table t(n) des valeurs de μ(n) pour a ≤ n < b
forall i ∈ [a ; b[ do
|   t(i) ← 1
end
forall p premier t.q p ∈ [2 ; √b] do
    forall m multiple de p² t.q m ∈ [a ; b[ do
    |   t(m) ← 0
    end
    forall m multiple de p t.q m ∈ [a ; b[ do
    |   t(m) ← t(m) · −p
    end
end
forall n ∈ [a ; b[ do
    if t(n) ≠ 0 then
        if |t(n)| < n then
        |   t(n) ← t(n) · −1
        end
        if t(n) > 0 then
        |   t(n) ← 1
        end
        if t(n) < 0 then
        |   t(n) ← −1
        end
    end
end
```

Algorithm 1: Tabulation de μ

Lemme 6. *À la fin de l'éxécution de l'algorithme 1 :*

$$t(n) = \mu(n)$$

Preuve.

- $t(n) = 0$ si et seulement si il existe p premier t.q $p^2 \mid n$ et donc que $\mu(n) = t(n) = 0$
- sinon $t(n) = \prod_{\substack{p \leq \sqrt{b} \\ p \text{ premier} \\ p \mid n}} -p$ et donc
  - soit $|t(n)| = n$ et alors $|\prod_{\substack{p \leq \sqrt{b} \\ p \text{ premier} \\ p \mid n}} -p| = n$ donc par définition de la fonction de Möbius (2) le signe de $t(n)$ est égal à $\mu(n)$
  - soit $|t(n)| < n$ et alors il existe p premier $> \sqrt{b}$ unique puisque sinon $n > b$ ainsi $\mu(n)$ est égal à -1 multiplié par le signe de $t(n)$

□

5.2 Complexités

Lemme 7. *Pour tout réel y strictement positif tel que $y = \frac{x}{m}$ alors on a que pour tout entier naturel k non nul tel que $k \leq \sqrt{y}$, la complexité du calcul de $\#\{\sqrt{y} < n \leq y, \lfloor \frac{y}{n} \rfloor = k\}$ est de l'ordre de $O(1)$ et s'implèmente de la sorte :*

```
x/(m*k) - MAX(x/(m*(k+1)), isqrt(x/m));
```

(isqrt détaillé à 5.4)

Preuve.

$$\begin{aligned}
\#\{\sqrt{y} < n \leq y, \lfloor \frac{y}{n} \rfloor = k\} &= \#\{\sqrt{y} < n \leq y, \lfloor \frac{y}{n} \rfloor = k\} \\
&= \#\{\sqrt{y} < n \leq y, k \leq \frac{y}{n} < k+1\} \\
&= \#\{\sqrt{y} < n \leq y, \frac{k}{y} \leq \frac{1}{n} < \frac{k+1}{y}\} \\
&= \#\{\sqrt{y} < n \leq y, \frac{y}{k+1} < n \leq \frac{y}{k}\} \\
&= \#\{\max(\lfloor \sqrt{y} \rfloor, \lfloor \frac{y}{k+1} \rfloor) < n \leq \lfloor \frac{y}{k} \rfloor\} \\
&= \lfloor \frac{y}{k} \rfloor - \max(\lfloor \sqrt{y} \rfloor, \lfloor \frac{y}{k+1} \rfloor).
\end{aligned}$$

Ainsi en posant $y = \frac{x}{m}$ on retrouve que $\#\{\sqrt{\frac{x}{m}} < n \leq \frac{x}{m}, \lfloor \frac{x}{mn} \rfloor = k\} = \lfloor \frac{x}{mk} \rfloor - \max(\lfloor \sqrt{\frac{x}{m}} \rfloor, \lfloor \frac{x}{m(k+1)} \rfloor)$. Puis nous verrons plus tard que la racine carré peut être précalculé pour obtenir une complexité de $O(1)$ □

Ainsi en utilisant le Lemme 5 et 6 on va réduire le nombre de termes de la formule (9).

Lemme 8. *Le nombre de termes de $S_1(x, u)$ et $S_2(x, u)$ est $O(\sqrt{xu})$ On notera $B_1(x, u)$ et resp. $B_2(x, u)$ le nombre de terme de $S_1(x, u)$ et $S_2(x, u)$.*

Preuve.

$$B_1(x, u) = \sum_{m \leq u} \sum_{\frac{u}{m} < n \leq \sqrt{\frac{x}{m}}} 1 = \sum_{m \leq u} (\lfloor \sqrt{\frac{x}{m}} \rfloor - \lfloor \frac{u}{m} \rfloor) < \sqrt{x} \sum_{m \leq u} \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Etudions la série $U_n = \sum_{m \leq n} \frac{1}{\sqrt{m}}$ Soient $k, t \in \mathbb{N}^*$ t.q $k \leq t \leq k+1$:

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

donc en intégrant sur $[k, k+1]$:

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq 2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

En sommant sur k de 1 à $n-1$ on obtient :

$$U_n - 1 \leq 2\sqrt{n} - 2 \leq U_n - \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Donc :

$$0 \leq 2\sqrt{n} - 1 - U_n \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ainsi On en déduit que $U_n = 2\sqrt{n} + O(1)$ et donc que $B_1(x,u) = O(\sqrt{xu})$
De même pour $S_2(x,u)$

$$B_2(x,u) = \sum_{k \leq \sqrt{x}} \sum_{m \leq \min(u, \frac{x}{k^2})} 1 \leq \sum_{m \leq u} \sum_{k \leq \sqrt{\frac{x}{m}}} 1 \leq \sum_{m \leq u} \sqrt{\frac{x}{m}}.$$

On retrouve donc de manière analogue que $B_2(x,u) = O(\sqrt{xu})$. Et ainsi que le nombre de termes de $S_1(x,u)$ et $S_2(x,u)$ est $O(\sqrt{xu})$. □

Lemme 9. *La complexité du crible d'erasthostène est $O(x \cdot \ln(\ln(x)))$.*

Preuve. Le nombre d'opérations du crible est de l'ordre de

$$\sqrt{x} + \sum_{\substack{p \leq \sqrt{x} \\ p \text{ premier}}} \frac{x - p^2}{p} \leq \sqrt{x} + x \sum_{\substack{p \leq \sqrt{x} \\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p}.$$

Or la somme $\displaystyle\sum_{\substack{p \leq \sqrt{x} \\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p} = \ln(\ln(\sqrt{x})) + M + o(1)$ où M est la constante de Meissel-Mertens [3].

On peut donc bien dire que le crible d'ératosthène est $O(x \cdot \ln(\ln(x)))$. □

Lemme 10. *La complexité de l'algorithme pour le calcul d'une table de μ (cf Algorithm 1) est $O((b-a)\ln(\ln(b)) + \frac{\sqrt{b}}{\ln(b)})$.*

Preuve. On remarque facilement que le nombre d'opérations est de l'ordre de

$$\begin{aligned}(b-a) + \sum_{\substack{p \leq \sqrt{b} \\ p \text{ premier}}} 1 + \frac{(b-a)}{p} + \frac{(b-a)}{p^2} \\ = (b-a) + (b-a) \sum_{\substack{p \leq \sqrt{b} \\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \sum_{\substack{p \leq \sqrt{b} \\ p \text{ premier}}} 1.\end{aligned}$$

Or par [3], on sait que $\displaystyle\sum_{\substack{p \leq \sqrt{x} \\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p} = \ln(\ln(\sqrt{x})) + M + o(1)$

et on sait aussi que $\sum_{\text{p premier}} \frac{1}{p^2} \leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, donc négligeable

Ainsi par le théorème des nombres premiers qui précise que $\pi(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{x}{\ln(x)}$

$$(b-a)+(b-a)\sum_{\substack{p\,\leq\,\sqrt{b}\\ p\text{ premier}}}\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\sum_{\substack{p\,\leq\,\sqrt{b}\\ p\text{ premier}}}1=$$
$$O((b-a)\ln(\ln(b))+\frac{\sqrt{b}}{\ln(b)}).$$

□

Ainsi puisque que l'on doit obtenir les valeurs de M jusqu'à $\frac{x}{u}$ (Lemme 5), on aura besoin des valeurs de μ jusqu'a $\frac{x}{u}$, et ainsi devoir cribler les nombres premiers jusqu'a $\sqrt{\frac{x}{u}}$.
On obtient donc que la complexité du calcul de la table des nombres premiers plus celle de μ est de

$$O(\frac{\sqrt{\frac{x}{u}}}{\ln(\frac{x}{u})}+\frac{x}{u}\ln(\ln(\frac{x}{u}))+\sqrt{\frac{x}{u}}\ln(\ln(\frac{x}{u})))=O(\frac{x}{u}\ln(\ln(\frac{x}{u}))) \tag{10}$$

5.3 Calcul de la fonction de Mertens

Maintenant qu'on a obtenu les tables de μ, Introduisons la tabulation de M pour des blocs de taille L

Corollaire. *La tabulation de M de a_k à a_{k+1} est $O(L\ln(\ln(a_{k+1})+\frac{\sqrt{a_{k+1}}}{\ln(a_{k+1})})$ si $M(a_k-1)$ a déjà été calculée.*

Preuve. Il suffit de tabuler μ de a_k à a_{k+1} et de poser pour tout entier naturel l tel que $l < a_{k+1}-a_k$
$M(a_k+l)=\mu(a_k+l)+M(a_k+l-1)$.
Ainsi la complexité sera celle la tabulation de $\mu+L$ soit $O(L\ln(\ln(a_{k+1}))+\frac{\sqrt{a_{k+1}}}{\ln(a_{k+1})})$. □

Regardons maintenant comment calculer $S_1(x,u)$ et $S_2(x,u)$. Avant ça nous démontrons la propriété générale suivante:

Lemme 11. *Pour $1\leq a\leq b$ on a :*

$$a\leq\frac{x}{mn}<b\Longleftrightarrow\frac{x}{mb}<n\leq\frac{x}{ma}.$$

Preuve.

$$a\leq\frac{x}{mn}<b\Leftrightarrow ma\leq\frac{x}{n}<bm$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{mb}<\frac{n}{x}\leq\frac{1}{ma}\Leftrightarrow\frac{x}{mb}<n\leq\frac{x}{ma}.$$

□

Intéréssons nous tout d'abord au nombre de termes de :

$$S_1(x,u) = \sum_{m\leq u} \mu(m) \sum_{\frac{u}{m}<n\leq\sqrt{\frac{x}{m}}} M(\frac{x}{mn}).$$

plus précisèment celui de $A_m := \sum_{\frac{u}{m}<n\leq\sqrt{\frac{x}{m}}} M(\frac{x}{mn})$.
Pour cela comme expliqué précément supposons que nous avons tabulé $M(n)$ pour un intervalle de taille L : $a_k \leq n < a_{k+1}$, avec $a_k = 1 + kL$ pour $k \leq \frac{x}{uL}$.
Nous avons alors le résultat suivant :

Théorème 3. *Le nombre de termes de S_1 (calculé par des blocs de taille L) noté α est:*

$$\alpha = \sum_{m\leq u} \sum_{k\leq \frac{x}{uL}} (\min(\lfloor\frac{x}{ma_k}\rfloor, \lfloor\sqrt{\frac{x}{m}}\rfloor)) - (\max(\lfloor\frac{x}{ma_{k+1}}\rfloor, \lfloor\frac{u}{m}\rfloor)).$$

Preuve. On démontre tout d'abord que le nombre de termes de la somme sur m d'un bloc L est :

$$\beta := \sum_{m\leq u} (\min(\lfloor\frac{x}{ma_k}\rfloor, \lfloor\sqrt{\frac{x}{m}}\rfloor)) - (\max(\lfloor\frac{x}{ma_{k+1}}\rfloor, \lfloor\frac{u}{m}\rfloor)).$$

En effet, en utilisant la définition de A_m et comme L est défini sur $[a_k\,; a_{k+1}[$, on ne peut obtenir les valeurs de M que dans l'intervalle:

$$a_k \leq \frac{x}{mn} < a_{k+1}.$$

Or $1 \leq a_k \leq a_{k+1}$ d'où par le Lemme 12 :

$$\frac{x}{ma_{k+1}} < n \leq \frac{x}{ma_k}.$$

De plus on voit via la définition de A_m que

$$\frac{u}{m} < n \leq \sqrt{\frac{x}{m}}.$$

On en déduit donc par les deux encadrements de n ci-dessus que:

$$(\max(\lfloor\frac{x}{ma_{k+1}}\rfloor, \lfloor\frac{u}{m})\rfloor) < n \leq (\min(\lfloor\frac{x}{ma_k}\rfloor, \lfloor\sqrt{\frac{x}{m}}\rfloor)).$$

D'où on a premièrement que :

$$\beta = \sum_{m\leq u} (\min(\lfloor\frac{x}{ma_k}\rfloor, \lfloor\sqrt{\frac{x}{m}}\rfloor)) - (\max(\lfloor\frac{x}{ma_{k+1}}\rfloor, \lfloor\frac{u}{m}\rfloor)).$$

Ainsi α est le résultat de la somme de β pour $k \leq \frac{x}{uL}$. D'où puisque $\beta \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sum_{k \leq \frac{x}{uL}} \beta \\
&= \sum_{k \leq \frac{x}{uL}} \sum_{m \leq u} (\min(\lfloor \frac{x}{ma_k} \rfloor, \lfloor \sqrt{\frac{x}{m}} \rfloor)) - (\max(\lfloor \frac{x}{ma_{k+1}} \rfloor, \lfloor \frac{u}{m} \rfloor)) \\
&= \sum_{m \leq u} \sum_{k \leq \frac{x}{uL}} (\min(\lfloor \frac{x}{ma_k} \rfloor, \lfloor \sqrt{\frac{x}{m}} \rfloor)) - (\max(\lfloor \frac{x}{ma_{k+1}} \rfloor, \lfloor \frac{u}{m} \rfloor)).
\end{aligned}$$

□

Corollaire. *Si L est plus grand que* $\frac{\sqrt{\frac{x}{u}}}{\ln(\frac{x}{u})}$ *, la complexité en espace de* $S_1(x,u)$ *est* $O(L)$*.*

Preuve. De la somme du nombre de termes découle :

$$S_1(x,u) = \sum_{k \leq \frac{x}{uL}} \sum_{m \leq u} \sum_{\max(\frac{x}{ma_{k+1}}, \frac{u}{m}) < n \leq \min(\frac{x}{ma_k}, \sqrt{\frac{x}{m}})} M(\frac{x}{mn}).$$

Ainsi $S_1(x,u)$ permet la tabulation de M par bloc de taille L.
Finalement, puisque par le théorème des nombres premiers, la complexité en espace de la table des nombres premiers jusqu'a $\sqrt{\frac{x}{u}}$ est $O(\frac{\sqrt{\frac{x}{u}}}{\ln(\frac{x}{u})})$.
Donc par l'hypothèse de départ, $S_1(x,u)$ est donc de complexité $O(L)$ en espace.

□

5.4 Calcul de la partie entière de la racine n-ième

Avant de continuer, il est nécessaire de préciser un point important.

Comment calculer avec les valeurs de la fonction $x \mapsto \lfloor \sqrt[n]{x} \rfloor$ *?*

En effet, plusieurs méthodes sont possibles, nous avons décider d'implémenter et de généraliser pour $\lfloor \sqrt[n]{a} \rfloor$ celle décrite pour $\lfloor \sqrt{a} \rfloor$ par [1]. Décrivons la:

Data: un entier positif $a \geq 1$
Result: le nombre m t.q $m^2 \leq a < (m+1)^2$
$x \leftarrow a$
$y \leftarrow \lfloor \frac{(x+\frac{a}{x})}{2} \rfloor$ `(avec la division entière et un décalage de bit)`
while $y < x$ **do**
  $x \leftarrow y$
  $y \leftarrow \lfloor \frac{(x+\frac{a}{x})}{2} \rfloor$
end
return x

Algorithm 2: Calcul de $\lfloor \sqrt{a} \rfloor$

Preuve. Puisque x est strictement décroissant, l'algorithme termine

$$\frac{(x+\frac{n}{x})}{2} \geq \sqrt{n} \Leftrightarrow \frac{(x+\frac{n}{x})}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{n}{x}} \Leftrightarrow (x+\frac{n}{x})-2\sqrt{x \cdot \frac{n}{x}} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{\frac{n}{x}})^2 \geq 0.$$

Donc pour tout réel positif x, $\frac{(x+\frac{a}{x})}{2} \geq \sqrt{a}$
Posons $q = \lfloor\sqrt{a}\rfloor$ l'inégalité $x \geq q$ est ainsi vérifié tout au long de l'algorithme.
De plus, si l'algorithme termine, cela signifie que $y = \lfloor\frac{(x+\frac{a}{x})}{2}\rfloor \geq x$.
Montrons que cela signifie que $x = q$.
Par l'absurde supposons que $x \geq q+1$.
Ainsi $y - x \leq \frac{(x+\frac{a}{x})}{2} - x = \frac{(\frac{a}{x}-x)}{2} = \frac{(a-x^2)}{2x}$ Puisque $x \geq q+1 > \sqrt{a}$, alors $a - x^2 < 0$ or cela implique $y - x < 0$ contradiction. Cela prouve la validité de l'algorithme. □

Ce raisonnement est équivalent à l'algorithme de Newton que l'on utilisera pour $\lfloor\sqrt[n]{a}\rfloor$.

Data: un entier positif a
Result: le nombre m t.q $m^n \leq a < (m+1)^n$
$x \leftarrow a$
$y \leftarrow \lfloor\frac{((n-1)*x+\frac{a}{x^{n-1}})}{n}\rfloor$ `(avec la division entière)`
while $y < x$ **do**
    $x \leftarrow y$
    $y \leftarrow \lfloor\frac{((n-1)*x+\frac{a}{x^{n-1}})}{n}\rfloor$
end
return x

Algorithm 3: Calcul de $\lfloor\sqrt[n]{a}\rfloor$

Preuve. On cherche tout d'abord à résoudre l'équation $f(x) = x^n - a = 0$.
Par la méthode de Newton $y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}$.
Nous utiliserons donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_{n+1} = x_n - \lfloor\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\rfloor$

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \lfloor\frac{x_k^n - a}{nx_k^{n-1}}\rfloor \\ &= \lfloor\frac{nx_k^n - x_k^n + a}{nx_k^{n-1}}\rfloor \\ &= \lfloor\frac{(n-1)x_k + \frac{a}{x_k^{n-1}}}{n}\rfloor. \end{aligned}$$

Prouvons tout d'abord l'inégalité arithmético-géométrique qui stipule que la moyenne géométrique de n réels strictement positifs $x_1, \ldots, x_n$ est inférieure à leur moyenne arithmétique :

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

Par croissance stricte du logarithme naturel, l'inégalité est équivalente à

$$\begin{aligned}
&\ln(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}) \geq \ln(\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n})\\
\Leftrightarrow &\ln(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}) \geq \frac{\ln(x_1)+\ ln(x_2)+\cdots+\ln(x_n)}{n}.
\end{aligned}$$

Puisque le logarithme est une fonction concave,
Par l'inégalité de Jensen appliqué aux fonctions concaves qui est que

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi(x_i).$$

où :

- φ est une fonction concave définie sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$,
- $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$,
- $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des réels positifs tels que $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$.

Ainsi en posant $\alpha_i = \frac{1}{n}$ on retrouve donc que

$$\ln(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n}) \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)$$

Soit l'inégalité arithmético-géométrique.
Montrons que la fonction $f(x) = \frac{(n-1)x+\frac{a}{x^{n-1}}}{n}$ est supérieur ou égal à $\sqrt[n]{a}$.
Par l'inégalité démontré précédemment

$$\begin{aligned}
&\frac{(n-1)x+\frac{a}{x^{n-1}}}{n} \geq \sqrt[n]{x^{n-1}\cdot\frac{a}{x^{n-1}}}\\
\Leftrightarrow &\frac{(n-1)x+\frac{a}{x^{n-1}}}{n} \geq \sqrt[n]{a}.
\end{aligned}$$

Ainsi pour tout entier $k \geq 1$, $x_k = \lfloor f(x_{k-1})\rfloor \geq \lfloor \sqrt[n]{a}\rfloor$.

De plus l'algorithme termine si et seulement si

$$\begin{aligned}
&x_{k+1} \geq x_k \\
\Leftrightarrow &\lfloor f(x_k) \rfloor \geq x_k \\
\Leftrightarrow &\lfloor \frac{(n-1)x_k + \frac{a}{x_k^{n-1}}}{n} \rfloor \geq x_k \\
\Leftrightarrow &\lfloor \frac{(n-1)x_k + \frac{a}{x_k^{n-1}}}{n} - x_k \rfloor \geq 0 \\
\Leftrightarrow &\lfloor \frac{\frac{a}{x_k^{n-1}} - x_k}{n} \rfloor \geq 0 \\
\Leftrightarrow &\frac{a}{x_k^{n-1}} - x_k \geq 0 \\
\Leftrightarrow &a - x_k^n \geq 0 \\
\Leftrightarrow &a \geq x_k^n \\
\Leftrightarrow &x_k \leq \lfloor \sqrt[n]{a} \rfloor.
\end{aligned}$$

Donc $x_k = \lfloor \sqrt[n]{a} \rfloor$ lorsque l'algorithme termine. □

La preuve ci-dessus pourrait s'appliquer à la racine n-ième non-entière, puisqu'il suffirait de supprimer les parties entières. Cependant, nous ne nous attarderons pas sur ce point.

5.5 Preuves des égalités des parties entières

Puisque l'ensemble des calculs est effectué à l'aide d'entiers de nombreuses égalités méritent d'être justifié. En commencant par celle décrite au dessus, soit x_k et n des entiers positif non nul

$$\lfloor \frac{(n-1)x_k + \lfloor \frac{a}{x_k^{n-1}} \rfloor}{n} \rfloor = \lfloor \frac{(n-1)x_k + \frac{a}{x_k^{n-1}}}{n} \rfloor.$$

Lemme 12. *Pour tout entier positif non nul c et b, on a l'égalité suivante:*

$$\lfloor \frac{\lfloor \frac{a}{b} \rfloor}{c} \rfloor = \lfloor \frac{a}{bc} \rfloor.$$

Preuve. Puisque :

$$\lfloor \frac{\lfloor \frac{a}{b} \rfloor}{c} \rfloor \leq \frac{\lfloor \frac{a}{b} \rfloor}{c} \leq \frac{a}{bc}.$$

Et que pour tout entier m :

$$m \leq \frac{a}{bc} \implies mc \leq a/b \implies mc \leq \lfloor a/b \rfloor \implies m \leq \frac{\lfloor a/b \rfloor}{c} \implies m \leq \left\lfloor \frac{\lfloor a/b \rfloor}{c} \right\rfloor.$$

Donc $\lfloor \frac{\lfloor \frac{a}{b} \rfloor}{c} \rfloor = \lfloor \frac{a}{bc} \rfloor$.

□

Ainsi pour notre formule de départ

$$\lfloor \frac{d + \lfloor \frac{a}{b} \rfloor}{c} \rfloor = \lfloor \frac{d + \frac{a}{b}}{c} \rfloor.$$

Il suffit de poser $a' = a + db$ et puisque d est entier, par le lemme précédent

$$\lfloor \frac{\lfloor \frac{a}{b} \rfloor + d}{c} \rfloor = \lfloor \frac{\lfloor \frac{a}{b} \rfloor + \lfloor d \rfloor}{c} \rfloor = \lfloor \frac{\lfloor \frac{a}{b} + \frac{bd}{b} \rfloor}{c} \rfloor = \lfloor \frac{\lfloor \frac{a'}{b} \rfloor}{c} \rfloor = \lfloor \frac{a + db}{bc} \rfloor = \lfloor \frac{\frac{a}{b} + d}{c} \rfloor.$$

5.6 Exponentiation rapide

En plus des algorithmes décrits plus haut nous avons implémenté l'exponentation rapide basé sur la réprensation binaire des entiers pour permettre de calculer les puissances:

```
unsigned long long ipow(unsigned long long base, unsigned long
    long exp) {
    unsigned long long result = 1;
    while (exp) {
        if (exp & 1){
            result *= base;
        }
        exp >>= 1;
        base *= base;
    }
    return result;
}
```

6 Calcul concret de $M(n)$

6.1 Minimisation de la complexité

Lemme 13. *Par les lemmes précédents, on obtient que la complexité de $M(n)$ est $O(\sqrt{xu} + \frac{x}{u}\ln(\ln(\frac{x}{u})))$.*

Preuve. $O(\frac{x}{u}\ln(\ln(\frac{x}{u})))$ correspond a la complexité de la tabulation de μ et des nombres premiers jusqu'à $\frac{x}{u}$ et est donc indispensable. (10)
Montrons que la tabulation par les blocs de taille L laisse inchangé la complexité calculé précédemment de $S_1(x,u)$ et de $S_2(x,u)$.
La complexité de $S_1(x,u)$ est égal à : (Par le théorème 3)

$$\sum_{m \leq u} \sum_{k \leq \frac{x}{uL}} (\min(\lfloor \frac{x}{ma_k} \rfloor, \lfloor \sqrt{\frac{x}{m}} \rfloor)) - (\max(\lfloor \frac{x}{ma_{k+1}} \rfloor, \lfloor \frac{u}{m} \rfloor)).$$

Or la suite $(\lfloor \frac{x}{ma_k} \rfloor)_k$ forme une subdivision de $[\frac{u}{m} ; \sqrt{\frac{x}{m}}]$ donc :

$$\sum_{k \leq \frac{x}{uL}} (\min(\lfloor \frac{x}{ma_k} \rfloor, \lfloor \sqrt{\frac{x}{m}} \rfloor)) - (\max(\lfloor \frac{x}{ma_{k+1}} \rfloor, \lfloor \frac{u}{m} \rfloor)) \leq \sqrt{\frac{x}{m}}.$$

Ainsi :

$$\sum_{m\leq u}\sum_{k\leq\frac{x}{uL}}(\min(\lfloor\frac{x}{ma_k}\rfloor,\lfloor\sqrt{\frac{x}{m}}\rfloor))-(\max(\lfloor\frac{x}{ma_{k+1}}\rfloor,\lfloor\frac{u}{m}\rfloor)).\leq\sum_{m\leq u}\sqrt{\frac{x}{m}}.$$

et de manière analogue au lemme 8 on retrouve bien que $S_1(x,u)$ à pour complexité en temps $O(\sqrt{xu})$.
De même pour $S_2(x,u)$ où :

$$S_2(x,u)=\sum_{k\leq\sqrt{x}}M(k)\sum_{m\leq min(u,\frac{x}{k^2})}\mu(m)l(\frac{x}{m},k)=\sum_{m\leq u}\mu(m)\sum_{k\leq\sqrt{\frac{x}{m}}}M(k)l(\frac{x}{m},k).$$

$\mu(m)$, $M(k)$, $l(\frac{x}{m},k)$ sont obtenu en $O(1)$ par les lemmes précédents et donc sa complexité égal à

$$S_2(x,u)=\sum_{m\leq u}\sum_{k\leq\sqrt{\frac{x}{m}}}1=\sum_{m\leq u}\sqrt{\frac{x}{m}}.$$

Dont on retrouve de manière analogue $O(\sqrt{xu})$. □

Ainsi en posant $u=(x)^{1/3}\cdot\ln(\ln(x))^{2/3}$ on obtient

$$\begin{aligned}&\sqrt{xu}+\frac{x}{u}\ln(\ln(\frac{x}{u}))\\&=x^{2/3}\ln(\ln(x))^{1/3}+\frac{x^{2/3}}{\ln(\ln(x))^{2/3}}\ln(\ln(\frac{x}{u}))\\&=O(x^{2/3}\ln(\ln(x))^{1/3}).\end{aligned}$$

6.2 Choix du facteur L

Le facteur L correspondant a la taille des blocs doit être pris assez grand pour éviter d'appeler un trop grand nombre de fois la tabulation de μ et ainsi améliorer la complexité en temps de $S_1(x,u)$. En définissant $L\geq u$, la complexité en espace de tout l'algorithme est $O(L)$.
Dans le tableau décrit ci-dessous nous avons utilisé $L=256u$, nécessitant environ 2Go de RAM pour calculer $n=10^{17}$.

6.3 Implémentation

Le code a été implémenté en C, en essayant d'utiliser le moins de librairies possibles pour éviter au maximum les erreurs d'arrondi et bien comprendre et maîtriser toutes les fonctions du programme. Le code est disponible à l'adresse : `https://moule.informatique.univ-paris-diderot.fr/-/snippets/6/raw/main/mertens_compute.c`

7 Tableau des valeurs de $M(n)$

Résultats pour $n = i \cdot 10^{16}$:

n	$M(n)$	Cpu time (ms)	Real time (s)
$1 \cdot 10^{16}$	-3195437	5132270	5137
$2 \cdot 10^{16}$	-7192737	8245970	8253
$3 \cdot 10^{16}$	-1493402	10810250	10819
$4 \cdot 10^{16}$	18329011	13057600	13068
$5 \cdot 10^{16}$	15092343	15077940	15091
$6 \cdot 10^{16}$	-15262206	17073420	17087
$7 \cdot 10^{16}$	45264522	18851100	18866
$8 \cdot 10^{16}$	-43148849	20596880	20613
$9 \cdot 10^{16}$	-27907378	22541820	22560
10^{17}	-21830254	24166000	24185

Les résultats pour 10^{16} et 10^{17} ont été vérifié en accord avec la littérature [2] [4].

Résultats pour $n = 2^i$ vérifié intégralement en accord avec [5]:

n	$M(n)$	n	$M(n)$	n	$M(n)$
2^{34}	-3421	2^{35}	8435	2^{36}	38176
2^{37}	-28118	2^{38}	38729	2^{39}	-135944
2^{40}	101597	2^{41}	15295	2^{42}	-169338
2^{43}	259886	2^{44}	-474483	2^{45}	1726370
2^{46}	-3554573	2^{47}	-135443	2^{48}	3282200
2^{49}	1958235	2^{50}	-1735147	2^{51}	6657834
2^{52}	-13927672	2^{53}	-11901414	2^{54}	48662015
2^{55}	-48361472	2^{56}	23952154	2^{57}	51885062

References

[1] Henri Cohen. *A Course in Computational Algebraic Number Theory*. en. Vol. 138. Graduate Texts in Mathematics. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1993. ISBN: 978-3-642-08142-2 978-3-662-02945-9. DOI: `10.1007/978-3-662-02945-9`. URL: `http://link.springer.com/10.1007/978-3-662-02945-9` (visited on 04/15/2024).

[2] Marc Deléglise and Joël Rivat. "Computing the summation of the Möbius function". In: *Experimental Mathematics* 5.4 (Jan. 1996). Publisher: A K Peters, Ltd., pp. 291–295. ISSN: 1058-6458, 1944-950X. URL: `https://projecteuclid.org/journals/experimental-mathematics/volume-5/issue-4/Computing-the-summation-of-the-M%c3%b6bius-function/em/1047565447.full` (visited on 04/16/2024).

[3] G. H. Hardy and E. M. Wright. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Fourth. Oxford, 1975.

[4] Harald A. Helfgott and Lola Thompson. *Summing $\mu(n)$: a faster elementary algorithm*. arXiv:2101.08773 [math]. Feb. 2022. URL: http://arxiv.org/abs/2101.08773 (visited on 04/15/2024).

[5] Greg Hurst. "Computations of the Mertens function and improved bounds on the Mertens conjecture". en. In: *Mathematics of Computation* 87.310 (Nov. 2017), pp. 1013–1028. ISSN: 0025-5718, 1088-6842. DOI: 10.1090/mcom/3275. URL: https://www.ams.org/mcom/2018-87-310/S0025-5718-2017-03275-0/ (visited on 04/15/2024).